SOBRE LA MECÁNICA RELACIONAL

Agustín A. Tobla

(2024) Buenos Aires

Argentina

En mecánica clásica, una nueva reformulación es presentada, que está de acuerdo con el principio general de relatividad, que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales, que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias, que es observacionalmente equivalente a la mecánica newtoniana y que establece la existencia de una nueva fuerza universal de interacción, denominada fuerza cinética (relacionada con la fuerza de inercia $-m\mathbf{a}$, y con el principio de Mach)

Keywords : Mecánica Relacional · Principio de Mach · Mecánica Clásica · Fuerza Cinética

Introducción

La nueva reformulación, que este trabajo presenta en mecánica clásica, se desarrolla a partir de un sistema auxiliar de partículas (denominado Universo) que es utilizado para obtener magnitudes cinemáticas (denominadas universales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La posición universal $\mathbf{r}_i$, velocidad universal $\mathbf{v}_i$ y aceleración universal $\mathbf{a}_i$ de una partícula i con respecto a un sistema de referencia S (inercial o no inercial) están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\tilde{r}_i) = (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq d(\tilde{r}_i)/dt = (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq d^2(\tilde{r}_i)/dt^2 = (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

donde $\tilde{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i con respecto al sistema universal [$\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del Universo y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del Universo] [con respecto al sistema S] (ver Anexo I)

El sistema universal es un sistema de referencia fijo al Universo ($\vec{\omega} = 0$) cuyo origen coincide siempre con el centro de masa del Universo ($\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$)

Cualquier sistema de referencia S es inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del Universo y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del Universo son iguales a cero con respecto a S.

Nota : ($\forall$ $\mathbf{m} \in$ Magnitudes Universales : Si $\mathbf{m} = \vec{n} \longrightarrow d(\mathbf{m})/dt = d(\vec{n})/dt - \vec{\omega} \times \vec{n}$)

Nueva Dinámica

[1] Toda fuerza siempre es causada por la interacción entre dos o más partículas.

[2] La fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una partícula i es siempre igual a cero : [$\mathbf{T}_i = 0$]

[3] En este trabajo, todas las fuerzas dinámicas (es decir, todas las fuerzas no cinéticas) deben obedecer siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte.

Fuerza Cinética

La fuerza cinética $\mathbf{K}_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j, causada por la interacción entre la partícula i y la partícula j, está dada por:

$$\mathbf{K}_{ij} \;=\; -\;\frac{m_i\, m_j}{M}\,(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la aceleración universal de la partícula i, $\mathbf{a}_j$ es la aceleración universal de la partícula j y M $(= \sum_i^{All} m_i)$ es la masa del Universo.

De la ecuación anterior se deduce que la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ $(= \sum_j^{All} \mathbf{K}_{ij})$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i, está dada por:

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\; m_i\,(\mathbf{a}_i - \mathbf{A})$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la aceleración universal de la partícula i y $\mathbf{A}$ $(= M^{-1} \sum_i^{All} m_i\,\mathbf{a}_i)$ es la aceleración universal del centro de masa del Universo.

Puesto que la aceleración universal del centro de masa del Universo $\mathbf{A}$ es siempre igual a cero entonces la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i queda:

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\; m_i\,\mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la aceleración universal de la partícula i.

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ está relacionada con la fuerza de inercia $-m\mathbf{a}$ (vis insita) y la fuerza cinética $\mathbf{K}_{ij}$ (como el origen de $-m\mathbf{a}$) está relacionada con el principio de Mach.

La fuerza $\mathbf{K}_i$ es la fuerza que equilibra la fuerza dinámica neta en cada partícula del Universo y la fuerza $\mathbf{K}_{ij}$ obedece siempre la 3ª ley de Newton en su forma fuerte o en su forma débil.

Sobre campos y potenciales de las fuerzas $\mathbf{K}_i$ y $\mathbf{K}_{ij}$ ver : Anexo A y Anexo B. La fuerza $\mathbf{K}_{ij}$ es obtenida a partir de la mecánica newtoniana en : https://n2t.net/ark:/13960/t85j04j78

[2] Principio

El [2] principio de la nueva dinámica establece que la fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una partícula i es siempre igual a cero.

$$\mathbf{T}_i \;=\; 0$$

Si la fuerza total $\mathbf{T}_i$ es dividida en las siguientes dos partes: la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ y la fuerza dinámica neta $\mathbf{F}_i$ ($\sum$ de fuerzas gravitatorias, fuerzas electrostáticas, etc.) entonces:

$$\mathbf{K}_i + \mathbf{F}_i \;=\; 0$$

Ahora, sustituyendo $\mathbf{K}_i$ $(= -\; m_i\,\mathbf{a}_i)$ y reordenando, finalmente se obtiene:

$$\mathbf{F}_i \;=\; m_i\,\mathbf{a}_i$$

Esta ecuación (similar a la segunda ley de Newton) será usada a lo largo de este trabajo.

Ecuación de Movimiento

La fuerza dinámica neta $\mathbf{F}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i está relacionada con la aceleración universal $\mathbf{a}_i$ de la partícula i según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_i \;=\; m_i\,\mathbf{a}_i$$

A partir de la ecuación anterior se deduce que la aceleración (ordinaria) $\vec{a}_i$ de la partícula i con respecto a un sistema de referencia S (inercial o no inercial) está dada por:

$$\vec{a}_i \;=\; \mathbf{F}_i/m_i + \vec{A} + 2\,\vec{\omega}\times(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega}\times[\,\vec{\omega}\times(\vec{r}_i - \vec{R})\,] + \vec{\alpha}\times(\vec{r}_i - \vec{R})$$

donde $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del Universo y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del Universo respecto a S (ver Anexo I)

Desde la ecuación anterior se deduce que la partícula i puede estar acelerada ($\vec{a}_i \neq 0$) incluso si sobre la partícula i no actúa fuerza dinámica alguna y también que la partícula i puede no estar acelerada ($\vec{a}_i = 0$) (estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme) incluso si sobre la partícula i actúa una fuerza dinámica neta no equilibrada.

Sin embargo, desde la ecuación anterior también se deduce que la primera y segunda ley de Newton son válidas en cualquier sistema de referencia inercial, puesto que la velocidad angular $\vec{\omega}$ del Universo y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del Universo son iguales a cero con respecto a cualquier sistema de referencia inercial.

En este trabajo, cualquier sistema de referencia S es un sistema de referencia inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del Universo y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del Universo son iguales a cero con respecto a S (una definición machiana de sistema inercial)

Por otro lado, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo y la mecánica newtoniana son observacionalmente equivalentes.

Sin embargo, los observadores no inerciales pueden utilizar la mecánica newtoniana sólo si introducen fuerzas ficticias en $\mathbf{F}_i$ (tales como la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis, etc.) Según ecuación anterior : $\mathbf{F}_{ficticias} \;=\; m_i\;\{\,+\vec{A} + 2\,\vec{\omega}\times(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega}\times[\,\vec{\omega}\times(\vec{r}_i - \vec{R})\,] + \vec{\alpha}\times(\vec{r}_i - \vec{R})\,\}$

Adicionalmente, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo es también una reformulación relacional de la mecánica clásica puesto que está desarrollada a partir de magnitudes relativas (posición, velocidad y aceleración) entre partículas.

Sin embargo, como se ha dicho más arriba, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo y la mecánica newtoniana son observacionalmente equivalentes.

Finalmente, la ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$] es válida en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial solamente si todas las fuerzas dinámicas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte (es decir, ... solamente si la ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i\,\vec{a}_i$] es siempre válida en el sistema de referencia universal)

A. Tobla, Una Reformulación de la Mecánica Clásica (I & II) : https://n2t.net/ark:/13960/s2gw1c02xdw

A. Tobla, Una Reformulación de la Mecánica Clásica (III & IV) : https://n2t.net/ark:/13960/s29z04fq64g

Anexo I

El Universo

El Universo es un sistema que contiene a todas las partículas, que está siempre libre de fuerzas externas y que todas las fuerzas dinámicas internas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del Universo respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del Universo respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \sum_i^{All} m_i$$

$$\vec{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{All} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{All} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{All} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \sum_i^{All} m_i \, [\, |\vec{r}_i - \vec{R}\,|^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^{All} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del Universo, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del Universo (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del Universo respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

Las transformaciones de posición, velocidad y aceleración de una partícula i entre un sistema de referencia S y otro sistema de referencia S', están dadas por:

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \;=\; \mathbf{r}_i \;=\; \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \;=\; \mathbf{r}'_i \;=\; \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \;=\; \mathbf{v}_i \;=\; \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \;=\; \mathbf{v}'_i \;=\; \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \;=\; \mathbf{a}_i \;=\; \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2\,\vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\,\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')\,] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \;=\; \mathbf{a}'_i \;=\; \mathbf{a}_i$$

Anexo A

Campos y Potenciales I

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[\, \mathbf{E} + (\vec{v}_i - \vec{V}\,) \times \mathbf{B} \,\Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-\nabla\phi \,-\, \partial\mathbf{A}/\partial t \,+\, (\vec{v}_i - \vec{V}\,) \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-(\vec{a}_i - \vec{A}\,) + 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}\,) - \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}\,)\,] + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}\,) \Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} \;=\; -\,\nabla\phi \,-\, \partial\mathbf{A}/\partial t$$

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi \;=\; -\,{}^1\!/_2\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}\,)\,]^2 \;+\; {}^1\!/_2\,(\vec{v}_i - \vec{V}\,)^2$$

$$\mathbf{A} \;=\; -\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}\,)\,] \;+\, (\vec{v}_i - \vec{V}\,)$$

$$\partial\mathbf{A}/\partial t \;=\; -\,\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}\,) + (\vec{a}_i - \vec{A}\,)\ ^{*}$$

$$\nabla\phi \;=\; \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}\,)\,]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \;=\; -\,2\,\vec{\omega}$$

— Ecuaciones Diferenciales —

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2\,\vec{\omega}^{\,2} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \;,\quad \nabla\times\mathbf{B} = 0$$

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i puede ser también obtenida a partir de la siguiente energía cinética:

$$K_i \;=\; -\,m_i\,[\,\phi \,-\, (\vec{v}_i - \vec{V}\,) \cdot \mathbf{A}\,]$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,(\vec{v}_i - \vec{V}\,) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}\,)\,\big]^2$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,\mathbf{v}_i\,\big]^2$$

Dado que la energía cinética K_i debe ser positiva, entonces aplicando la siguiente ecuación Euler-Lagrange, se obtiene:

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\,\frac{d}{dt}\left[\,\frac{\partial\,{}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,\mathbf{v}_i\,\big]^2}{\partial\,\mathbf{v}_i}\,\right] + \frac{\partial\,{}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,\mathbf{v}_i\,\big]^2}{\partial\,\mathbf{r}_i} \;=\; -\,m_i\,\mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ y $\mathbf{a}_i$ son la posición universal, la velocidad universal y la aceleración universal de la partícula i.

---

* En la derivada parcial temporal considerar las coordenadas espaciales como constantes [o modificar esto en la primera ecuación: $+\,{}^1\!/_2\,(\vec{v}_i - \vec{V}\,)\times\mathbf{B}$, y esto en la segunda ecuación: $+\,{}^1\!/_2\,(\vec{v}_i - \vec{V}\,)\times(\nabla\times\mathbf{A})$]

Anexo B

Campos y Potenciales II

La fuerza cinética $\mathbf{K}_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}_{ij} \;=\; +\, m_i\, m_j\, M^{-1} \Big[\, \mathbf{E} + (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times \mathbf{B} \,\Big]$$

$$\mathbf{K}_{ij} \;=\; +\, m_i\, m_j\, M^{-1} \Big[- \nabla\phi \,-\, \partial\mathbf{A}/\partial t \,+\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big]$$

$$\mathbf{K}_{ij} \;=\; +\, m_i\, m_j\, M^{-1} \Big[- (\vec{a}_i - \vec{a}_j) + 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\,] + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} \;=\; -\,\nabla\phi \,-\, \partial\mathbf{A}/\partial t$$

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi \;=\; -\, {}^1\!/_2\, [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\,]^2 \,+\, {}^1\!/_2\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2$$

$$\mathbf{A} \;=\; -\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\,] + (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$$

$$\partial\mathbf{A}/\partial t \;=\; -\,\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + (\vec{a}_i - \vec{a}_j)\ {}^*$$

$$\nabla\phi \;=\; \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\,]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \;=\; -\,2\,\vec{\omega}$$

— Ecuaciones Diferenciales —

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2\,\vec{\omega}^{\,2} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \;,\; \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

La fuerza cinética $\mathbf{K}_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j puede ser también obtenida a partir de la siguiente energía cinética:

$$K_{ij} \;=\; -\, m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, \phi \,-\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \mathbf{A} \,\big]$$

$$K_{ij} \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,\big]^2$$

$$K_{ij} \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \,\big]^2$$

Dado que la energía cinética K_{ij} debe ser positiva, entonces aplicando la siguiente ecuación Euler-Lagrange, se obtiene:

$$\mathbf{K}_{ij} \;=\; -\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\, {}^1\!/_2\, \frac{m_i\, m_j}{M} \big[\, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \,\big]^2}{\partial\,[\,\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\,]}\right] + \frac{\partial\, {}^1\!/_2\, \frac{m_i\, m_j}{M} \big[\, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \,\big]^2}{\partial\,[\,\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\,]} \;=\; -\,\frac{m_i\, m_j}{M}\,\big[\, \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j \,\big]$$

donde $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j$ y $\mathbf{a}_j$ son las posiciones universales, las velocidades universales y las aceleraciones universales de la partícula i y de la partícula j.

---

* En la derivada parcial temporal considerar las coordenadas espaciales como constantes [o modificar esto en la primera ecuación: $+\, {}^1\!/_2\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times \mathbf{B}$, y esto en la segunda ecuación: $+\, {}^1\!/_2\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times (\nabla \times \mathbf{A})$]